Bsp. 70: 3D: $\sigma_V = 2\tau_{max} = \max\left(|\sigma_1-\sigma_2|;|\sigma_2-\sigma_3|;|\sigma_3-\sigma_1|\right)$

ebener Spannungszustand, Tresca: $\sigma_V = 2\tau_{max}$,

unterschiedl. Vorzeichen: $\tau_{insges,max} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$

also: $\sigma_V = 2\tau_{insges,max} = \sigma_{max}-\sigma_{min} = |\sigma_1-\sigma_2|$ $\qquad \sigma_{1,2}$ ... HNS

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_V = \left|\cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} - \cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right|$$

$$= \left|2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right| = 2\tau_{max}^{eben}$$

($\hat{=}$ 2 Radius → Durchmesser des Mohr'schen Spannungskreises)

Bsp. 71: 3D: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\sigma_x\sigma_y-\sigma_x\sigma_z-\sigma_y\sigma_z+3\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$

(Huber-von Mises-Hencky)
└ Erstvorschlag 1904

ebener Spannungszustand, von-Mises: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}$

oder $\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_2^2+\sigma_1^2\right]}$
$= \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}$

$\sigma_{1,2}$ von oben eingesetzt:

$$\sigma_V = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2+\cancel{2\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}+\cancel{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2}+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\\&\cancel{-2\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}-\underbrace{\left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)+\sqrt{\ }\right]\left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)-\sqrt{\ }\right]}_{=\cancel{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2}-\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2-\tau_{xy}^2}\end{aligned}}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+3\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y}{4}+3\,\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\sigma_x\sigma_y}{4}+3\tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4\sigma_x^2+4\sigma_y^2-4\sigma_x\sigma_y}{4}+3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}$$

+ Hauptnormalspannungshyp.
f. spröde Werkstoffe (GG)
$\sigma_V = \max(\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3)$

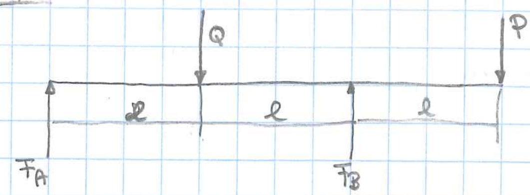
Allgemein zu Vergleichshypo.:

Nötig um den komplexen Spannungszustand in einem realen Bauteil mit Messwerten aus Zugversuchen (uniaxial) vergleichen zu können.
Je nach erwarteten Versagensbild wird andere Hypothese verwendet.

Schubspannungshypothese: Fließen eines duktilen Materials entlang der Kristallebenen durch Schubspg. → Lüders-Bänder.

Gestaltänderungsenergiehyp.: (GEH) Nur Verzerrung für Fließen relevant & nicht hydrostatische Verformung, da bei Letzterem nur ein mathematisch ähnlicher Körper entsteht.

Bsp. 72:



$Q = q_B \cdot 2l = 7500\,Nm^{-1} \cdot 2 \cdot 3m = 45KN$

$P = 7.5KN$
$\sigma_{zul} = 2800\,KPa = 2.8\,MPa$
$q_B = 7500\,Nm^{-1}$
$l = 3m$

$\uparrow + \quad \sum_i F_{y_i} = 0: \quad F_A + F_B - Q - P = 0 \qquad (1)$

$\sum_i M_i^{(A)} = 0: \quad Q \cdot l - F_B \cdot 2l + P \cdot 3l = 0 \qquad (2)$

aus (2) $F_B = \frac{1}{2l}(Q \cdot l + 3Pl) = \frac{1}{2}(45KN + 3 \cdot 7.5KN)$

$\underline{F_B = 33.75\,KN}$

aus (1) $F_A = Q + P - F_B = 45KN + 7.5KN - 33.75KN$

$\underline{F_A = 18.75\,KN}$

mit $\sigma = \frac{F}{A}$ & $\sigma_{zul} \geq \sigma$ folgt $\underline{\sigma_{zul} \geq \frac{F}{A}}$ je Platte

also $A \geq \frac{F}{\sigma_{zul}}$

Platte A': $a^2 \geq \frac{F_A}{\sigma_{zul}} = \frac{18.75 \cdot 10^3 N}{2.8\,MPa} = 6696\,mm^2$

$a \geq 81.8mm = 8.2cm \rightarrow \boxed{a = 9cm}$

Platte B': $b^2 \geq \frac{F_B}{\sigma_{zul}} = \frac{33.75 \cdot 10^3 N}{2.8\,MPa} = 12053.6\,mm^2$

$b \geq 109.8mm = 10.98cm \rightarrow \boxed{b = 11cm}$

Bsp. 73: $\sigma_x = 12\,MPa$, $\sigma_y = -8\,MPa$, $\tau_{xy} = 7\,MPa$, $\sigma_F = \sigma_{yield} = 50\,MPa$ Fließspg. aus Zugversuch

(1) Schubspannungshypothese:

$\sigma_V = |\sigma_1 - \sigma_2|$, $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$(\sigma_{max} - \sigma_{min})$

! vorsicht wenn $\sigma_2 > 0$!

$\sigma_{1,2} = \frac{12 - 8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12+8}{2}\right)^2 + 7^2}$

$\sigma_1 = 14.21\,MPa$, $\sigma_2 = -10.207\,MPa$

$\sigma_V^{Tr} = |\sigma_1 - \sigma_2| = |14.21 + 10.207| = \underline{24.417\,MPa}$

$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{S_{Tr}}$, $\sigma_V \leq \sigma_{zul} \rightarrow \sigma_V \leq \frac{\sigma_B}{S_{Tr}} \rightarrow \underline{S_{Tr}} = \frac{\sigma_B}{\sigma_V^{Tr}} = \frac{50MPa}{24.417MPa} = \underline{2.05}$

(2) von Mises:

$\sigma_V^{mis} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{14.21^2 + 10.207^2 + 14.21 \cdot 10.207} = \underline{21.24\,MPa}$

$\underline{S_{mis}} = \frac{\sigma_B}{\sigma_V^{mis}} = \frac{50MPa}{21.24MPa} = \underline{2.35}$

Bsp. 74:

$\sigma_x = 580\,\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 180\,\text{MPa}$

Tresca: $\sigma_V = 2\tau_{max}^{eben} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = 2\sqrt{\left(\frac{580-0}{2}\right)^2+180^2} = \underline{682.64\,\text{MPa}} = \sigma_B$ (ohne Sicherheit)

von Mises: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2} = \sqrt{580^2+3\cdot180^2} = \underline{658.48\,\text{MPa}} = \sigma_B$ (ohne Sicherheit)

oder auch (wie vorher):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = 290\,\text{MPa} \pm 341.32\,\text{MPa}$$

$\sigma_1 = 631.32\,\text{MPa}$

$\sigma_2 = -51.32\,\text{MPa}$

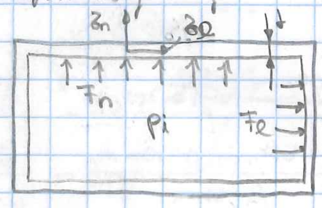
und dann gilt:

Tresca: $\sigma_V = |\sigma_1-\sigma_2| = |631.32+51.32| = \underline{682.64\,\text{MPa}}$ ✓

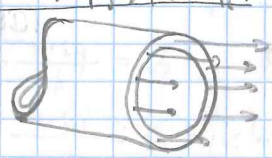
von Mises: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{631.32^2+51.32^2+631.32\cdot51.32} = \underline{658.48\,\text{MPa}}$ ✓

Allg. Bemerkungen zu den Kesselformeln

Geeignet zur Berechnung von Druck- & Zugbeanspruchung in geschlossenen Hohlkörpern, wenn der Hohlkörper dünnwandig ist.
Hier ist die größte Spannung immer die Tangentialspannung → Rohr platzt in Längsrichtung auf. Wurst!



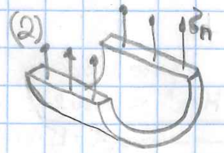
(1) Längsspg./Axialspg.



$$\sigma_{l} = \frac{F_l}{A} = \frac{p_i\cdot \overbrace{r^2\pi}^{\text{Seitenfläche}}}{2r\pi\cdot t}$$

$$\boxed{\sigma_l = \frac{p_i\cdot r}{2t}}$$

(2)



Normalspg./Tangential

$$\sigma_{n} = \frac{F_n}{A} = \frac{p_i\cdot \overbrace{2r\cdot l}^{\text{Umfangsfläche projiziert}}}{t\cdot l\cdot 2} \longrightarrow \boxed{\sigma_n = \frac{p_i\cdot r}{t}}$$

also: $\boxed{\sigma_n = 2\sigma_l}$

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & 0 \\ 0 & 0 & \sim 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_r = -p_i$

Für kugelförmige Kessel gilt:

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_l = \frac{p_i\cdot r}{2t}}$$

Optimum zw. Materialbedarf & Kesselvolumen
→ aber mehr Platzbedarf als Zylinder.

Bsp. ~~75~~:

- größte Normalspannung: $\sigma_n = \frac{p_i \cdot r}{d} \leq \sigma_{zul} \longrightarrow p_i \leq \frac{\sigma_{zul} \cdot d}{r} = \left| \sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{S} \right|$

$$= \frac{\sigma_B \cdot d}{S \cdot r} = \frac{300\,MPa \cdot 10\,mm}{2 \cdot 1000\,mm}$$

$$\underline{p_i \leq 1.5\,Nmm^{-2} = \underline{15\,bar}}$$

- Radius- & Längenänderung: (Hooke'sches Gesetz sinngemäß angewandt)

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_l) = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\rightarrow \Delta r = \frac{r}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_l) = \frac{r}{E}\left(\frac{p_i \cdot r}{d} - \nu\frac{p_i \cdot r}{2d}\right) = \frac{1000\,mm}{2.1 \cdot 10^5\,MPa}\left(\frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{10\,mm} - 0.3\,\frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{2 \cdot 10\,mm}\right)$$

$$\underline{\Delta r = 0.61\,mm}$$

$$\varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu\sigma_n) = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\rightarrow \Delta l = \frac{l}{E}(\sigma_l - \nu\sigma_n) = \frac{l}{E}\left(\frac{p_i \cdot r}{2d} - \nu\frac{p_i \cdot r}{d}\right) = \frac{5000\,mm}{2.1 \cdot 10^5\,MPa}\left(\frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{2 \cdot 10\,mm} - 0.3\,\frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{10\,mm}\right)$$

$$\underline{\Delta l = 0.714\,mm}$$

- Vergleichsspg. bei Zusatzbelastung:

Normalspg. unverändert: $\sigma_n = \frac{p_i \cdot r}{d} = \frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{10\,mm} = \underline{150\,Nmm^{-2}}$

Längsspg. durch P geändert: $\sigma_l = \frac{p_i \cdot r}{2d} - \frac{P}{2r\pi \cdot d} = \frac{1.5\,Nmm^{-2} \cdot 1000\,mm}{2 \cdot 10\,mm} - \frac{600 \cdot 10^3\,N}{2 \cdot 1000\,mm \cdot \pi \cdot 10\,mm}$

$$\underline{\sigma_l = 65.5\,Nmm^{-2}}$$

$$\sigma_V^{mis} = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_l^2 - \sigma_n\sigma_l} = \sqrt{150^2 + 65.5^2 - 150 \cdot 65.5} = \underline{130.26\,MPa} < \underset{=150\,MPa}{\sigma_{zul}} \checkmark$$

Bsp. 76:

$$kg\,m^{-1}s^{-2} = kg\,m\,s^{-2}m^{-2} = N\,m^{-2}$$

Druck in 300m Wassertiefe: $\underline{p_H} = \rho g h + p_0 = 1000\,kg\,m^{-3}\,9.81\,m\,s^{-2}\cdot 300\,m + 1\cdot 10^5\,N\,m^{-2}$

$$= 3.043\cdot 10^6\,N\,m^{-2} = \underline{3.043\,N\,mm^{-2}}$$

größte Normalspannung:

$$\sigma_n = \frac{p_i \cdot r_i}{t} \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{S}$$

$$\rightarrow t \geqslant \frac{p_i \cdot r_i \cdot S}{\sigma_B} = \frac{3.043\,N\,mm^{-2}\cdot \frac{550\,mm}{2}\cdot 2}{520\,N\,mm^{-2}} = \underline{3.22\,mm}$$

Bsp. 77:

Spannungen: $\sigma_e = \frac{p_i \cdot d_m}{4t} - \frac{P}{d_m \pi t} = \frac{2\cdot 820}{4\cdot t} - \frac{800\cdot 10^3}{820\cdot \pi t} = \frac{1}{t}\left(\frac{2\cdot 820}{4} - \frac{800\cdot 10^3}{820\pi}\right)$

$$\underline{\sigma_e = \frac{99.45}{t}}$$

$$\underline{\sigma_n} = \frac{p_i \cdot d_m}{2t} = \frac{1}{t}\left(\frac{2\cdot 820}{2}\right) = \underline{\frac{820}{t}} \quad , \quad \sigma_r = 0$$

Tresca-Kriterium:

$$\sigma_V = |\sigma_{max} - \sigma_{min}| = |\sigma_n - \sigma_r| = \frac{820}{t} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{S} = \frac{250\,MPa}{2.5} = 100\,MPa$$

d.h. $\frac{820}{\sigma_{zul}} \leq t \rightarrow t \geqslant \frac{820}{100} = \underline{8.2\,mm} \rightarrow$ aufgerundet: $\boxed{t = 9\,mm}$

d.h. $\underline{\sigma_e} = \frac{99.45}{9} = \underline{11.1\,MPa}$

$$\underline{\sigma_n} = \frac{820}{9} = \underline{91.1\,MPa}$$

Höhenänderung:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{E}(\sigma_e - \nu\,\sigma_n) = \frac{\Delta h}{h} \rightarrow \Delta h = \frac{h}{E}(\sigma_e - \nu\,\sigma_n) = \frac{6000}{208\cdot 10^3}(11.1 - 0.3\cdot 91.1)$$

$$\boxed{\Delta h = -0.468\,mm}$$

Kesselerwärmung für $\Delta h = 0$:

$$\Delta h_{ges} = \Delta h + \Delta h_{Th} = \Delta h + \alpha\cdot\Delta T\cdot h \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \Delta T = \frac{-\Delta h}{\alpha\cdot h} = \frac{0.468}{1.2\cdot 10^{-5}\cdot 6000} = 6.5\,K$$

$$\boxed{\Delta T = 6.5\,K}$$