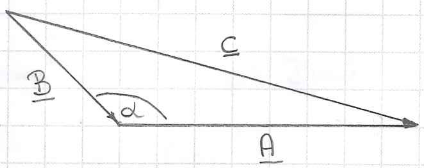
| Topic | | |
|---|---|---|
| Location | Time | Date |

**Bsp.-7:** Die Seiten eines allgem. Dreiecks werden durch $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ dargestellt.




ges.: (1) $\underline{C} = \underline{C}(\underline{A}, \underline{B})$

(2) Allg. Zusammenhang zwischen den Betragsquadraten der Vektoren

(3) Spezialfall von (2) für $\alpha = \frac{\pi}{2}$

(1) $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$

(2) $|\underline{C}|^2 = |\underline{A}+\underline{B}|^2 = (\underline{A}+\underline{B})\cdot(\underline{A}+\underline{B}) = \underline{A}\cdot\underline{A} + \underline{A}\cdot\underline{B} + \underline{B}\cdot\underline{A} + \underline{B}\cdot\underline{B} = |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + 2\,\underline{A}\cdot\underline{B}$

(3) wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(=90^\circ)$ steht $\underline{A} \perp \underline{B}$ und es gilt: $\underline{A}\cdot\underline{B} = 0$ (rechtwinkliges Dreieck)

somit $|\underline{A}+\underline{B}|^2 = |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2$ ... Satz von Pythagoras

**Bsp.-6:** Berechne das Kreuzprodukt der Vektoren $\underline{r} = (x, y, z)$ und $\underline{p} = (1, 0, 2)$.

$$\underline{r} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ z-2x \\ -y \end{pmatrix}$$

oder

$\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123}$ $\quad$ $\varepsilon_{231} = \varepsilon_{123}$

$$\underline{r} \times \underline{p} = (x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3) \times (1\,\underline{e}_1 + 2\,\underline{e}_3) = -2x\,\underline{e}_2 - y\,\underline{e}_3 + 2y\,\underline{e}_1 + z\,\underline{e}_2$$

$=0$ $\quad$ $\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123}$ $\quad$ $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{123}$

$$= \begin{pmatrix} 2y \\ z-2x \\ -y \end{pmatrix}$$

umgekehrt:

$$\underline{p} \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x-z \\ y \end{pmatrix} = -\underline{r} \times \underline{p}$$

**Bsp.-5:** Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\underline{A} = (3,6,9)$ und $\underline{B} = (-2,3,1)$.

aus SP-Def.: $\underline{A}\cdot\underline{B} = |\underline{A}|\cdot|\underline{B}|\cos\gamma$ wobei $|\underline{A}| = \sqrt{3^2+6^2+9^2} = \sqrt{126}$

$|\underline{B}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

$|\underline{A}|\cdot|\underline{B}| = \sqrt{126}\cdot\sqrt{14} = \sqrt{126\cdot 14} = 42$

und $\underline{A}\cdot\underline{B} = (3,6,9)\cdot(-2,3,1) = -6+18+9 = 21$

also $\cos\gamma = \dfrac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{|\underline{A}|\cdot|\underline{B}|} = \dfrac{21}{42} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \underline{\underline{\gamma = 60^\circ}}$

---

**Bsp.-4:** Bestimme das Volumen des Parallelepipeds mit den Seitenvektoren
$\underline{a} = (1,0,0)\,\mathrm{mm}$, $\underline{b} = (0,1,1)\,\mathrm{mm}$, $\underline{c} = (0,2,4)\,\mathrm{mm}$

$$V = \underbrace{\underline{a}}_{\text{zugehörige Höhe}} \cdot \underbrace{(\underline{b}\times\underline{c})}_{\text{Grundfläche}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 4-2 = \underline{\underline{2\,\mathrm{mm}^3}}$$

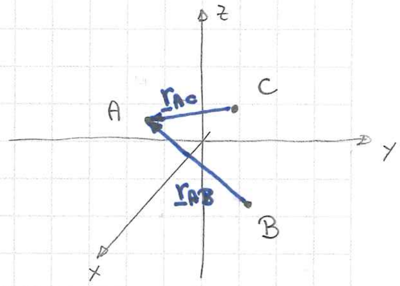
---

**Bsp.-3:** Bestimme die Fläche eines Dreiecks mit den Eckpunkten $A(3,6,10)_m$, $B(8,4,-2)_m$ und $C(1,2,3)_m$.

$A = \frac{1}{2}|\underline{r}_{AB}\times\underline{r}_{AC}|$ wobei $\underline{r}_{AB} = A - B = (3,6,10)\,m - (8,4,-2)\,m = (-5,2,12)\,m$

$\underline{r}_{AC} = A - C = (3,6,10)\,m - (1,2,3)\,m = (2,4,7)\,m$

$$\underline{r}_{AB}\times\underline{r}_{AC} = \begin{vmatrix}\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3\\ -5 & 2 & 12\\ 2 & 4 & 7\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 7 - 12\cdot 4\\ 12\cdot 2 + 5\cdot 7\\ -5\cdot 4 - 2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-34\\ 59\\ -24\end{pmatrix} m^2$$




$|\underline{r}_{AB}\times\underline{r}_{AC}| = \sqrt{34^2+59^2+24^2} = 72.2\,m^2$

$\underline{A} = \frac{1}{2}|\underline{r}_{AB}\times\underline{r}_{AC}| = \underline{\underline{36.1\,m^2}}$

---

**Bsp.-2:** Es seien die Vektoren $\underline{A}(t) = 5t\,\underline{e}_1 + 8t^2\,\underline{e}_2 - 6t\,\underline{e}_3$ und $\underline{B}(t) = -3t^3\,\underline{e}_1 + 2t^2\,\underline{e}_2 - 10t\,\underline{e}_3$ gegeben. Berechne die totale Zeitableitung der jeweiligen Vektoren, sowie jene des Skalarproduktes.

$\dfrac{d\underline{A}(t)}{dt} = 5\,\underline{e}_1 + 16t\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3$ , $\dfrac{d\underline{B}(t)}{dt} = -9t^2\,\underline{e}_1 + 4t\,\underline{e}_2 - 10\,\underline{e}_3$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{A}(t)\cdot\underline{B}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(-15t^4 + 16t^4 + 60t^2\right) = -60t^3 + 64t^3 + 120t = \underline{\underline{4t^3 + 120t}}$$

Bsp.-1: Vektorfeld $\underline{A}$ und Skalarfeld $\Psi$ sind gegeben.

$$\underline{A}(x,y,z) = 6x^3y^2\,\underline{e_x} + y^2z\,\underline{e_y} - z^2x\,\underline{e_z}$$

$$\Psi(x,y,z) = xy^2z$$

Bestimme $\underline{K} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z}\Psi\underline{A}$ im Punkt $P(1,-2,1)$.

$$\underline{K} = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(6x^4y^4z\,\underline{e_x} + xy^4z^2\,\underline{e_y} - x^2y^2z^3\,\underline{e_z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^4y^4\,\underline{e_x} + 2xy^4z\,\underline{e_y} - 3x^2y^2z^2\,\underline{e_z}\right)$$

$$= 24x^4y^3\,\underline{e_x} + 8xy^3z\,\underline{e_y} - 6x^2yz^2\,\underline{e_z}$$ allgemein Ableitung!

$$\| \underline{K}(1,-2,1) = -192\,\underline{e_x} - 64\,\underline{e_y} + 12\,\underline{e_z} \|$$ im Punkt P

---

Bsp. 0: Der Vektor $\underline{A}(s) = (9s^2-1)\,\underline{e_x} + (4s-6)\,\underline{e_y} + (10s^3-4s)\,\underline{e_z}$ sei gegeben.

Berechne das Integral $\underline{K} = \displaystyle\int_{s=2}^{4} \underline{A}(s)\,ds$

$$\underline{K} = \int_{s=2}^{4}\left[(9s^2-1)\,\underline{e_x} + (4s-6)\,\underline{e_y} + (10s^3-4s)\,\underline{e_z}\right]ds = \left[\left(\frac{\cancel{9}^{\,3}s^3}{\cancel{3}} - s\right)\underline{e_x} + \left(\frac{\cancel{4}^{\,2}s^2}{\cancel{2}} - 6s\right)\underline{e_y} + \left(\frac{\cancel{10}^{\,5}s^4}{\cancel{4}_{\,2}} - \frac{\cancel{4}^{\,2}s^2}{\cancel{2}}\right)\underline{e_z}\right]_2^4$$

$$= \left(3\cdot4^3 - 4 - 3\cdot2^3 + 2\right)\underline{e_x} + \left(2\cdot4^2 - 6\cdot4 - 2\cdot2^2 + 6\cdot2\right)\underline{e_y} + \left(\frac{5\cdot4^4}{2} - 2\cdot4^2 - \frac{5\cdot2^4}{2} + 2\cdot2^2\right)\underline{e_z}$$

$$\| \underline{K} = 166\,\underline{e_x} + 12\,\underline{e_y} + 576\,\underline{e_z} \|$$