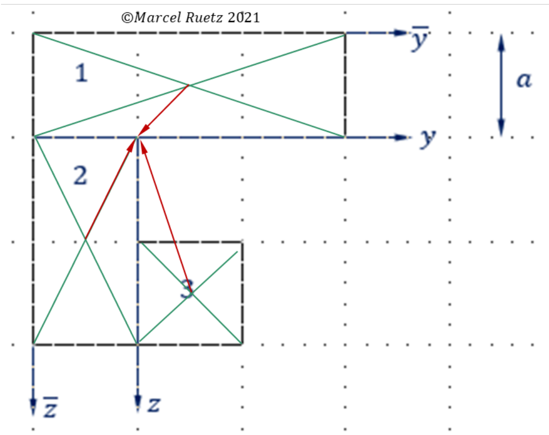
Zusätzliche Übungsbeispiele Lösung

```
syms a
```

Beispiel 1:

Berechne zunächst die y- und z-Abstände zum gegeben KS.

Achtung: Achte auf korrektes Vorzeichen, wichtig für das Deviationsmoment.



Bem. Ob wir die roten Pfeile vom Teilschwerpunkt zum Gesamtschwerpunkt oder umgekehrt zeichnen ist prinzipiell egal. Wichtig ist lediglich das sie die Konvention immer beibehalten, ansonsten treten Fehler auf.

```
A1 = 3*a*a;
y1 = -a/2;
z1 = a/2;
A2 = 2*a*a;
y2 = a/2;
z2 = -a;
A3 = a*a;
y3 = -a/2;
z3 = -3/2*a;
```

a.) die Flächenträgheits- und Deviationsmomente des Querschnitts 1 bezogen auf das y-z-Koordinatensystem.

Das axiale Flächenträgheitsmoment eines Rechteckquerschnitts bezogen auf die y-Achse durch seinen Schwerpunkt lautet:

$$J_y^S = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Das axiale Flächenträgheitsmoment bezüglich der gegebenen y-Achse ist

$$J_{y1} = J_{y1}^S + A_1 \cdot z_1^2$$

```
Jy1 = 3*a*a^3/12+A1*z1^2
```

Jy1 = a^4

Das axiale Flächenträgheitsmoment eines Rechteckquerschnitts bezogen auf die z-Achse durch seinen Schwerpunkt lautet:

$$J_z^S = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Das axiale Flächenträgheitsmoment bezüglich der gegebenen z-Achse ist

$$J_{z1} = J_{z1}^S + A_1 \cdot y_1^2$$

```
Jz1 = a*(3*a)^3/12+A1*y1^2
```

Jz1 = $3\,a^4$

Das Flächendeviationsmoment einer Rechteckfläche bezogen auf seine Schwerpunktsachsen ist gleich null.

$$J_{yz}^S = 0$$

Das Deviationsmoment bezüglich der gegebenen Koordinatensystems ist ist

$$J_{yz1} = J_{yz1}^S + A_1 \cdot y_1 \cdot z_1$$

```
Jyz1 = A1*y1*z1
```

Jyz1 =

$$-\frac{3\,a^4}{4}$$

Achtung: Steineranteil nicht vergessen!

b.) die Flächenträgheits- und Deviationsmomente des Querschnitts 2 bezogen auf das y-z-Koordinatensystem.

Es gilt analoges wie oben erklärt

```
Jy2 = a*(2*a)^3/12+A2*z2^2
```

Jy2 =

$$\frac{8\,a^4}{3}$$

```
Jz2 = 2*a*(a)^3/12+A2*y2^2
```

Jz2 =

$$\frac{2\,a^4}{3}$$

```
Jyz2 = A2*y2*z2
```

Jyz2 = $-a^4$

b.) die Flächenträgheits- und Deviationsmomente des Querschnitts 2 bezogen auf das y-z-Koordinatensystem.

Es gilt analoges wie oben erklärt

```
Jy3 = a*(a)^3/12+A3*z3^2
```

Jy3 =

$$\frac{7\,a^4}{3}$$

```
Jz3 = a*(a)^3/12+A3*y3^2
```

Jz3 =

$$\frac{a^4}{3}$$

```
Jyz3 = A3*y3*z3
```

Jyz3 =

$$\frac{3\,a^4}{4}$$

d.) die axialen Flächenträgheitsmomente sowie das Deviationsmoment bezogen auf das y-z-Koordinatensystem

```
Jy = Jy1+Jy2+Jy3
```

Jy = $6\,a^4$

```
Jz = Jz1+Jz2+Jz3
```

Jz = $4\,a^4$

```
Jyz = Jyz1+Jyz2+Jyz3
```

Jyz = $-a^4$

e.) die Hauptträgheitsmomente bezogen auf das y-z-Koordinatensystem

```
J1 = simplify((Jy+Jz)/2+sqrt(((Jy-Jz)/2)^2+Jyz^2))
```

J1 = $5\,a^4 + \sqrt{2}\ \sqrt{a^8}$

```
J2 = simplify((Jy+Jz)/2-sqrt(((Jy-Jz)/2)^2+Jyz^2))
```

J2 = $5\,a^4 - \sqrt{2}\ \sqrt{a^8}$

$J_{1,2} = (5 \pm \sqrt{2}) \cdot a^4$

Beispiel 2:

```
syms p_i l E nu sigma_x
```

Zunächst stellen wir die Randbedingungen für diese Problemstellung auf

An der Oberfläche der Scheibe wirkt der Druck p_i. Da kein Spannungsgradient in y-Richtung auftritt (wir berücksichtigen hier ja kein Eigengewicht bzw. Volumenkraftdichte im allgemeinen). Folglich tritt in jedem Materialpunkt diese Spannung auf.

a.) Die Spannung σ_y

```
sigma_y = -p_i
```

sigma_y = $-p_i$

Weiters liegt die Scheibe in einem starren Gesenk. Da kein Spannungsgradient in x-Richtung auftritt wird das Versschiebungsfeld null sein. Daher können wir schreiben

```
epsilon_x = 0
```

epsilon_x = 0

b.) Die Spannung σ_x

Die Berechnung erfolgt mithilfe des Hooke'schen Gesetz

```
sigma_x = solve( epsilon_x == 1/E*(sigma_x-nu*sigma_y), sigma_x)
```

Warning: Solutions are valid under the following conditions: E ~= 0. To include parameters and conditions in the solution, specify the 'ReturnConditions' value as 'true'.

sigma_x = $-\nu\, p_i$

c.) Maximale Schubspannung τ_{max}

Die Bestimmung ist sehr einfach mithilfe des Mohr'schen Spannungskreises.
Der Mohr'sche Spannungskreis ist auf die Druckseite verschoben mit den Hauptnormalspannungen $\sigma_1 = -\nu \cdot p_i$ und $\sigma_2 = -p_i$. Die maximalen auftretenden Schubspannungen sind die Hauptschubspannungen. Diese entspricht genau dem Radius des Mohr'schen Spannungskreises.

```
tau_max = simplify((sigma_x+sigma_y)/2)
```

tau_max =

$$-\frac{p_i\ (\nu+1)}{2}$$

d.) Verzerrung ε_x

Diese wurden bereits bei den Randbedingungen bestimmt.

```
epsilon_x = 0
```

epsilon_x = 0

e.) Verzerrung ε_y

```
epsilon_y = simplify(1/E*(sigma_y-nu*sigma_x))
```

epsilon_y =

$$\frac{p_i\ (\nu^2-1)}{\mathrm{E}}$$

f.) Verschiebung des oberen Randes

```
vr = a*epsilon_y
```

vr =

$$\frac{a\,p_i\ (\nu^2-1)}{\mathrm{E}}$$

Beispiel 3

```
syms q0 l AV B x My Jy z a
```

a.) Horizontale Auflagerkraft A_H

Aus dem horizontalen Kräftegleichgewicht folgt:

```
AH = 0;
```

b.) Vertikale Auflagerkraft A_V

Achtung: Es wird nachfolgend angenommen das A_V nach unten wirkt.

Aus dem Momentengleichgewicht bezogen auf Punkt B folgt:

```
AV = solve(AV*l+q0*l*1/2*l-q0*l*l == 0, AV)
```

AV =

$$\frac{l\,q_0}{2}$$

c.) Auflagerkraft B

Aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht folgt:

```
B = solve(B-q0*l-q0*l-AV == 0, B)
```

B =

$$\frac{5\,l\,q_0}{2}$$

d.) Biegemomentenverlauf im Bereich 1

Bereich 1: $0 \le x \le l$

```
My1(x) = simplify(solve(My+1/2*q0*x^2+AV*x == 0, My))
```

My1(x) =

$$-\frac{q_0\,x\,(l+x)}{2}$$

e.) Biegemomentenverlauf im Bereich 2

Bereich 2: $l \le x \le 2l$

```
My2(x) = solve(My+AV*x-B*(x-l)+q0*l*(x-l/2)== 0, My )
```

My2(x) = $l\,q_0\,x - 2\,l^2\,q_0$

f.) Detektierung der Stellen des maximalen Biegemoments

Formulieren einer Extremwertaufgabe

```
x =  solve(diff(My1,x) == 0, x)
```

x =

$$-\frac{l}{2}$$

Diese Stelle liegt auserhalb des Gültigkeitsbereich von Bereich 1 ist somit nicht gültig. Wir wissen aber, dass an Zwischen Stützen das Biegemoment oftmals maximal ist.

Warum haben wir diese Stelle mit der Formulierung einer Extremwertaufgabe nicht gefunden?

Die Antwort ist sehr einfach, an der Stelle einer Zwischenstütze hat der Biegemomentenverlauf einen Knick. An dieser Stelle ist die Funktion nicht stetig differenzierbar, folglich liefert die Extremwertaufgabe dann kein Ergebnis.

```
xmax = l
```

xmax = l

g.) Das maximale Biegemoment

```
Mymax = My1(l)
```

Mymax = $-l^2\, q_0$

Logischerweise können wir dieses Ergebnis auch aus dem zweiten Momentenverlauf finden

```
Mymax = My2(l)
```

Mymax = $-l^2\, q_0$

Offensichtlich ist die Rechnung bisher richtig.

h.) Die Biegespannungsverteilungen

Bereich 1: $0 \leq x \leq l$

```
sigma_x = My1/Jy*z
```

sigma_x(x) =

$$-\frac{q_0\, x\, z\, \left(l+x\right)}{2\,\mathrm{Jy}}$$

Bereich 2: $l \leq x \leq 2l$

```
sigma_x = My2/Jy*z
```

sigma_x(x) =

$$-\frac{z\ \left(2\,l^2\,q_0 - l\,q_0\,x\right)}{\mathrm{Jy}}$$

i.) Die maximalen Biegespannungen

Die maximalen Biegespannungen treten logischerweise an jenen Stellen auf, an denen das Biegemoment maximal wird. Desweiteren treten die maximalen Biegespannungen in den Randfasern des Querschnitts auf.

```
z = -a/2;
sigma_xmax = Mymax/Jy*z
```

```
sigma_xmax =
```

$$\frac{a\,l^2\,q_0}{2\,\mathrm{Jy}}$$